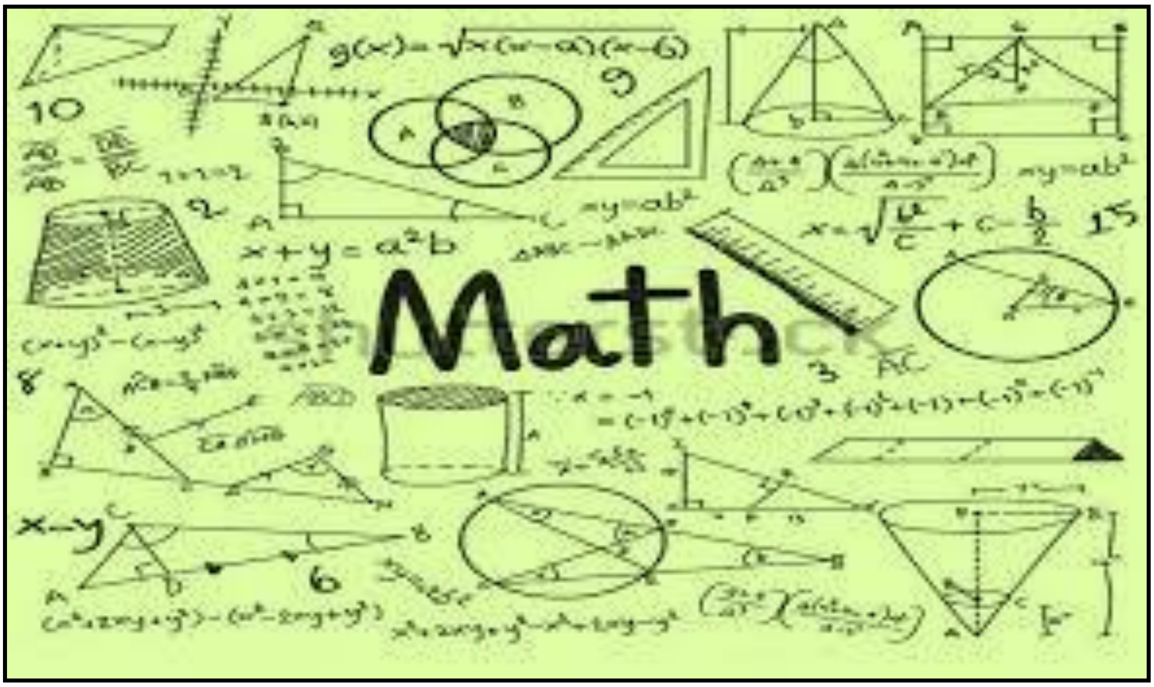
أساسيات الرياضيات

التوجيهي الأدبي

المنهاج الجديد



إعداد

أستاذ الرياضيات

عماد قنح

0772380962

مقدمة

أقدم هذا العمل لجميع طلبة المرحلة الثانوية (التوجيهي) ليكون لهم معيناً أثناء دراسة مادة الرياضيات، إذ تُعتبر أساسيات الرياضيات مدخلاً هاماً للبدء في دراسة مواضيع التفاضل والتكامل والاحصاء والاحتمالات، وأرجو أن تجدوا فيه كل ما تحتاجونه من مواضيع تساعدهم في دراستهم.

لقد جاءت فكرة هذا العمل من خلال الخبرة المتراكمة في تدريس طلبة المرحلة الثانوية وخاصة الفرع الأدبي، فقد تم تضمين كافة المواضيع التي تهم الطلبة فيه والتي لاحظت أنها تشكل عائقاً أمام الكثيرين تحول بينهم وبين فهم المادة، مما يؤدي إلى شعورهم بأن مادة الرياضيات صعبة ويستعصي فهمها، وبعد إنجاز هذا العمل كلي أمل بأن دراسة مادة الرياضيات ستصبح سهلة وممتعة.

أقدم نصيحتي إلى الطلبة الأعزاء بدراسة أساسيات الرياضيات وإتقانها قبل البدء بدراسة المنهاج المقرر الأمر الذي سيؤدي بإذن الله إلى إحداث تغيير كبير في دراستهم ونتائجهم، متمنياً النجاح والتفوق للجميع.

الأستاذ عماد قندح

فهرس المحتويات

مجموعـات الأعـــداد

يعتبر فهم مجموعات الأعداد من الأمور الهامة في دراسة الرياضيات، ويجب أن يكون لدى الطالب المقدرة على التمييز بين مجموعات الأعداد المختلفة للتمكّن من إجراء العمليات حسب القوانين الخاصة بكل مجموعة، وتصنف مجموعات الأعداد كما يلي:

1. **مجموعة الأعداد الطبيعية ($\mathbb{N}$)**

تسمى هذه المجموعة أيضاً (أعداد العد)، وتعتبر أول أعداد استخدمها الإنسان، ونتمكن من خلالها إجراء عمليات الجمع والطرح بصورتها البسيطة حيث:

$$\mathbb{N} = \{1 , 2 , 3 , 4 , \dots\}$$

2. **مجموعة الأعداد الصحيحة ($\mathbb{Z}$)**

هي مجموعة أكبر من مجموعة الأعداد الطبيعية وتتكون من الأعداد الصحيحة الموجبة ($\mathbb{Z}^+$) والصحيحة السالبة ($\mathbb{Z}^-$) والصفر وتمكننا من إجراء عمليات حسابية أكثر من مجموعة الأعداد الطبيعية كالعمليات التي تحتوي على أعداد سالبة حيث:

$$\mathbb{Z} = \{\dots , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , \dots\}$$

3. **مجموعة الأعداد النسبية ($\mathbb{Q}$)**

هي مجموعة الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a , b أعداد صحيحة، $b \neq 0$.

ملاحظات حول مجموعة الأعداد النسبية

1. يسمى العدد a في العدد النسبي (بسط) ويسمى العدد b (مقام).
2. كل عدد صحيح هو عدد نسبي مقامه العدد 1 فالعدد 5 يمكن كتابته على صورة $\frac{5}{1}$
3. يمكن تمثيل الأعداد النسبية كأعداد عشرية عند إجراء القسمة بين البسط والمقام للعدد النسبي، ويكون الناتج إما كسر عشري منتهي أو كسر عشري غير منتهي دوري.

أمثلة

1. $\frac{4}{8} = 0.5$
2. $\frac{1}{3} = 0.3333\dots = 0.\overline{3}$

4. **<u>مجموعة الأعداد غير النسبية ($\bar{\mathbb{Q}}$)</u>**

هي مجموعة الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة $\frac{a}{b}$وتتكون مما يلي:

1. **الجذور التربيعية للمربعات غير الكاملة، مثل ($\sqrt{18}$, $\sqrt{2}$).**
2. **الجذور التكعيبية للمكعبات غير الكاملة، مثل ($\sqrt[3]{17}$, $\sqrt[3]{9}$).**
3. **الجذور الأخرى مثل ($\sqrt[6]{55}$, $\sqrt[5]{30}$).**
4. **الكسور العشرية غير المنتهية وغير الدورية، مثل (... 0.3024568).**
5. **بعض الثوابت الرياضية مثل النسبة التقريبية (π) والعدد النيبيري (e).**

5. **<u>مجموعة الأعداد الحقيقية ($\mathbb{R}$)</u>**

وهي المجموعة الناتجة من اتحاد مجموعتي الأعداد النسبية وغير النسبية.

خصائص العمليات على الأعداد الحقيقية

هناك بعض الخصائص للعمليات على الأعداد الحقيقية وتعتبر على غاية من الأهمية للتمكّن من إجراء العمليات المختلفة على الأعداد الحقيقية وهي كما يلي:

1. <u>الخاصية التبديلية على الجمع والضرب.</u> إذا كان a , b عددين حقيقيين فإن :

$$a + b = b + a \qquad , \qquad a \times b = b \times a$$

أي أنه يمكن تبديل طرفي الجمع والضرب دون أن يتغير ناتج العملية.

<u>أمثلة</u>

$$2 + 5 = 5 + 2 = 7 \qquad , \qquad 3 \times 4 = 4 \times 3 = 12$$

2. <u>الخاصية التجميعية على الجمع والضرب.</u> إذا كانت a , b , c أعداد حقيقية فإن:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad , \qquad (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

أي أنه يمكن إجراء أكثر من عمليتي جمع أو ضرب بأي ترتيب دون أن يتغير ناتج العملية.

<u>أمثلة</u>

$$3 + 2 + 6 = 5 + 6 = 11 \qquad , \qquad 3 \times 2 \times 4 = 6 \times 4 = 24$$

Or $$3 + 2 + 6 = 3 + 8 = 11 \qquad , \qquad 3 \times 2 \times 4 = 3 \times 8 = 24$$

3. <u>خاصية توزيع الضرب على الجمع والطرح.</u> إذا كانت a , b , c أعداد حقيقية فإن:

$$a \times (b \mp c) = a \times b \mp a \times c$$

وتعتبر هذه الخاصية مهمة جداً خاصة في العمليات على المقادير الجبرية.

<u>مثال</u>

1. $2 \times (3 + 5) = (2 \times 3) + (2 \times 5) = 6 + 10 = 16 \quad as \quad 2 \times 8 = 16$
2. $4 \times (5 - 3) = (4 \times 5) - (4 \times 3) = 20 - 12 = 8 \quad as \quad 4 \times 2 = 8$

4. <u>خاصية العناصر المحايدة للجمع والضرب.</u> إذا كان a عدداً حقيقياً فإن:

$\mathrm{a} + 0 = 0 + a = a$ (أي أن العدد صفر لا يؤثر على عملية الجمع)

$\mathrm{a} \times 1 = 1 \times a = a$ (أي أن العدد 1 لا يؤثر على عملية الضرب)

<u>أمثلة</u> $3 + 0 = 3$ ، $5 \times 1 = 5$

$0 + 4 = 4$ ، $1 \times 7 = 7$

.5 **خاصية نظائر الجمع والضرب.** إذا كان a عدداً حقيقياً $\neq 0$ فإن :

1. $a + (-a) = -a + a = 0$

(يسمى العدد $(-a)$ معكوس العدد (a) أو النظير الجمعي له)

2. $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$

(يسمى العدد $\left(\frac{1}{a}\right)$ مقلوب العدد (a) أو النظير الضربي له)

أمثلة

$$3 + (-3) = 0 \quad , \quad -4 + 4 = 0$$

$$5 \times \frac{1}{5} = 1 \quad , \quad \frac{1}{7} \times 7 = 1$$

أي أن : ناتج جمع عدد مع معكوسه = صفر ، وحاصل ضرب عدد بمقلوبه = 1

.6 **خاصية الضرب بالصفر.** إذا كان a عدداً حقيقياً فإن:

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

أي أنه عند ضرب أي عدد بالصفر فإن الناتج يكون صفراً.

القيمة المطلقة للعدد | |

هي القيمة الموجبة للعدد.

مثال

1. $|5| = 5$
2. $|-2| = 2$
3. $\left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

العمليات الحسابية على الأعداد الصحيحة

أولاً　جمع الأعداد الصحيحة

تتم عملية جمع الأعداد الصحيحة ضمن قاعدتين أساسيتين وكما يلي:

قاعدة 1: لجمع عددين لهما نفس الإشارة نجمع العددين بدون إشارات (كأعداد موجبة) ونعطي الناتج إشارة العددين نفسها.

مثال　$3 + 5 = 8$

تمثل هذه العملية جمع عددين موجبين، نجمع العددين ويكون الناتج موجباً

$-3 + (-5) = -8$

تمثل هذه العملية جمع عددين سالبين، نجمع العددين ويكون الناتج سالباً

قاعدة 2: لجمع عددين مختلفين في الإشارة نجد الفرق المطلق بينهما (نطرح كأعداد موجبة) ونعطي الناتج إشارة العدد الذي قيمته المطلقة أكبر.

مثال　$8 + (-5) = 3$

تمثل هذه العملية جمع عددين مختلفين في الإشارة، لذلك نطرحهما كأعداد موجبة (3=5−8) ويكون الناتج موجباً لأن |8| > |−5|.

$-9 + 5 = -4$

تمثل هذه العملية جمع عددين مختلفين في الإشارة، لذلك نطرحهما كأعداد موجبة (4=5−9) ويكون الناتج سالباً لأن |−9| > |5|.

ثانياً طرح الأعداد الصحيحة

لا يوجد قواعد للطرح كما في الجمع وإنما نقوم بتحويل عمليات الطرح إلى عمليات جمع ثم نستخدم قواعد الجمع المذكورة أعلاه وذلك كما يلي:

1. $a - b = a + (-b)$ (أي أن عملية طرح عدد موجب تعادل عملية جمع عدد سالب)

2. $a - (-b) = a + b$ (أي أن عملية طرح عدد سالب تعادل عملية جمع عدد موجب)

أمثلة

1. $9 - 6 = 9 + (-6) = 3$ عدد أكبر – عدد أصغر / يمكن إجراء هذه العملية مباشرة ويكون الناتج موجباً

2. $3 - 8 = 3 + (-8) = -5$ عدد أصغر – عدد أكبر / نعكس عملية الطرح ويكون الناتج سالباً

3. $-9 - 6 = -15$ – عدد – عدد / يمكن إجراء العملية بجمع العددين ويكون الناتج سالباً

4. $9 - (-6) = 9 + 6 = 15$

5. $-5 - (-8) = -5 + 8 = 3$

6. $-9 - (-3) = -9 + 3 = -6$

تدريب جد الناتج فيما يلي:

1. $3 + 0 =$	12. $11 - 5 =$
2. $9 \times 0 =$	13. $9 - (-5) =$
3. $5 \times 0 =$	14. $-4 - (-9) =$
4. $7 + (-7) =$	15. $-9 \times 1 =$
5. $4 \times (2 + 5) =$	16. $25 - 12 =$
6. $9 + 7 + 15 =$	17. $13 - 23 =$
7. $5 \times 4 \times 3 =$	18. $-17 + 11 =$
8. $-12 + 14 =$	19. $10 - 21 =$
9. $18 + (-22) =$	20. $-8 + 22 =$
10. $3 \times (2 - 7) =$	21. $-15 - 13 =$
11. $-7 - 15 =$	22. $24 + (-11) =$

ثالثاً ضرب الأعداد الصحيحة

تعتبر عمليات ضرب الأعداد الصحيحة من العمليات الأساسية التي كثيراً ما يلجأ الطالب إليها لحل المسائل المختلفة، ويجب أن يحفظ الطالب جداول الضرب بشكل ممتاز لضمان صحة ودقة الإجابات أثناء الحل، وتالياً خطوات مقترحة لتسهيل حفظ جداول الضرب:

1. نسخ الجداول بشكل متكرر ويومي.
2. تكرار تسميع الجداول بالترتيب.
3. تسميع الجداول عن طريق الاستعانة بشخص آخر.
4. حل مسائل مختلفة على عمليات الضرب يقوم بكتابتها شخص آخر للطالب.

نظام الإشارات في الضرب

1. حاصل ضرب عددين متشابهين في الإشارة هو عدد موجب.

$$- \times - = + \qquad , \qquad + \times + = +$$

2. حاصل ضرب عددين مختلفين في الإشارة هو عدد سالب.

$$- \times + = - \qquad , \qquad + \times - = -$$

مثال جد الناتج فيما يلي:

8. $-8 \times -9 =$	1. $3 \times 7 =$
9. $4 \times -6 =$	2. $9 \times 4 =$
10. $-7 \times -5 =$	3. $6 \times 8 =$
11. $-6 \times 11 =$	4. $-5 \times -3 =$
12. $3 \times 12 =$	5. $6 \times -6 =$
13. $4 \times -4 =$	6. $8 \times -7 =$
14. $-5 \times -12 =$	7. $-9 \times -3 =$

تدريب جد الناتج فيما يلي:

15. $5 \times 7 =$	22. $-8 \times 4 =$	29. $-9 \times 4 =$
16. $9 \times 5 =$	23. $7 \times -6 =$	30. $5 \times 12 =$
17. $5 \times 8 =$	24. $4 \times 7 =$	31. $3 \times 8 =$
18. $4 \times -3 =$	25. $-8 \times 11 =$	32. $-5 \times 7 =$
19. $7 \times -7 =$	26. $12 \times 3 =$	33. $12 \times 4 =$
20. $7 \times 8 =$	27. $9 \times -3 =$	34. $7 \times 9 =$
21. $6 \times -3 =$	28. $6 \times 12 =$	35. $9 \times -2 =$

رابعاً **قسمة الأعداد الصحيحة**

تعتبر عملية قسمة الأعداد الصحيحة عملية عكسية للضرب، وتعتمد أساساً على حفظ الطالب لجداول الضرب، فعملية القسمة (2 ÷ 12) تمثل البحث عن العدد الذي نقوم بضربه بالعدد 2 ليكون الناتج 12 ، فيكون الجواب هو العدد 6.

نظام الإشارات في القسمة

1. ناتج قسمة عددين متشابهين في الإشارة هو عدد موجب.

$$+ \div + = + \quad , \quad - \div - = +$$

2. حاصل ضرب عددين مختلفين في الإشارة هو عدد سالب.

$$+ \div - = - \quad , \quad - \div + = -$$

مثال جد الناتج فيما يلي:

1. $21 \div 3 =$	8. $-72 \div -9 =$
2. $36 \div 4 =$	9. $24 \div -6 =$
3. $48 \div 8 =$	10. $-35 \div -5 =$
4. $-15 \div -3 =$	11. $-66 \div 11 =$
5. $36 \div -6 =$	12. $36 \div 12 =$
6. $56 \div -7 =$	13. $16 \div -4 =$
7. $27 \div -3 =$	14. $-60 \div -12 =$

تدريب جد الناتج فيما يلي:

1. $42 \div 7 =$	8. $-24 \div 4 =$	15. $-24 \div 8 =$
2. $45 \div 5 =$	9. $42 \div -6 =$	16. $36 \div 12 =$
3. $48 \div 8 =$	10. $35 \div 7 =$	17. $64 \div 8 =$
4. $28 \div -7 =$	11. $-88 \div 11 =$	18. $54 \div 9 =$
5. $18 \div -3 =$	12. $24 \div 3 =$	19. $-49 \div 7 =$
6. $72 \div 8 =$	13. $36 \div -3 =$	20. $36 \div 4 =$
7. $27 \div -3 =$	14. $48 \div 12 =$	21. $22 \div -2 =$

أولويات العمليات الحسابية

لكي نحصل على إجابات موحدة للعمليات الحسابية المختلطة لابد وأن يتم إجراء كافة العمليات وفق نظام معين ويسمى أولويات العمليات الحسابية والتي تكون كما يلي:

1. حساب ما داخل الأقواس والأسس.
2. عمليات الضرب والقسمة من اليسار إلى اليمين.
3. عمليات الجمع والطرح من اليسار إلى اليمين.

ملاحظة نطبق الأولويات 2 ، 3 داخل الأقواس عند وجود عمليات مختلطة ثم نحسب الأس للعدد المتبقي داخل القوس.

مثال جد ناتج العمليات التالية.

1. $3 \times (5-1) - 4 \times 2 =$

$=$

2. $(4 - 6 \div 3)^2 - 3 \times 4 =$

$=$

$=$

3. $2 \times (3)^2 - 3 \times 8 + 2 =$

$=$

$=$

تدريب جد الناتج فيما يلي:

1. $(4 \div 2 + 5) \times 2 - 3 \times 2 =$	3. $(3+1)^2 - 2 \times (7-3) + 5 =$
2. $2 + (49 \div 7 - 1) + 2 \times 3 - 4 =$	4. $(4 \times 2 - 6)^2 - 3 \times (5-3)^3 =$

الأعداد الأولية والمركبة وقابلية القسمة

تُقسم الأعداد من حيث تكوينها إلى قسمين هما:

1. الأعداد الأولية: وهي الأعداد التي لا تقبل القسمة بدون باقي إلا على نفسها وعلى العدد 1 فقط، ومن الأمثلة عليها الأعداد 3 ، 5 ، 19 ، 23 ، 31، ...

2. الأعداد المركبة: وهي الأعداد التي تقبل القسمة بدون باقي على أكثر من عددين، ومن الأمثلة عليها الأعداد 6 ، 9 ، 15 ، 22 ، 64، ...

قابلية القسمة

تعتبر قابلية القسمة من العمليات الرياضية المهمة وذلك بسبب الحاجة لاستخدامها في قسمة الأعداد وتبسيط الكسور لتسهيل إجراء بعض العمليات الحسابية، وتالياً أهم قواعدها:

1. قابلية القسمة على (2): يقبل العدد القسمة على 2 إذا كان زوجياً (آحاده عدد زوجي)، فالأعداد 10، 12، 24 ، 36 ، 48 تقبل القسمة على العدد 2.

2. قابلية القسمة على (3): يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان مجموع أرقام منازله من مضاعفات العدد 3، فالعدد 258 يقبل القسمة على 3 لأن 8+5+2=15 والعدد 15 من مضاعفات العدد 3.

3. قابلية القسمة على (5): يقبل العدد القسمة على 5 إذا كان آحاده صفراً أو 5، فالأعداد 15، 35، 70، 90 جميعها تقبل القسمة على 5.

4. قابلية القسمة على (6): يقبل العدد القسمة على 6 إذا كان يقبل القسمة على العددين 2، 3 معاً، فالعدد 36 يقبل القسمة على 6 لأنه يقبل القسمة على 2، 3 معاً.

5. قابلية القسمة على (10): يقبل العدد القسمة على 10 إذا كان آحاده صفراً.

تدريب ضع إشارة (✓) أو (×) مقابل كل عدد حسب قابلية القسمة كما في الجدول التالي

العدد	القسمة على 2	القسمة على 3	القسمة على 6	القسمة على 5	القسمة على 10
8					
12					
15					
16					
18					
24					
30					
42					
48					
64					
75					
81					
100					
125					
132					

الكسور والعمليات عليها

كما أن هناك أهمية لمعرفة قواعد العمليات على الأعداد الصحيحة، فإن العمليات على الكسور لا تقل أهمية عنها، وبناءً عليه فإنه يجب أن يكون لدى الطلبة القدرة على التعامل مع الكسور وإجراء العمليات عليها بدقة ومهارة عالية.

أولاً الكسور المتكافئة

يمكن الحصول على كسور متكافئة من خلال ضرب بسط ومقام أي كسر بعدد ثابت، وتكون الكسور المتكافئة متساوية.

مثال أكتب ثلاثة كسور مكافئة للكسر $\frac{2}{3}$

وبناءاً عليه يكون :

ثانياً تبسيط الكسور

يمكن إجراء عمليات تبسيط (اختصار) للكسور من خلال قسمة بسط ومقام الكسر على عدد ثابت، ويستفاد منها بتسهيل إجراء العمليات الحسابية وفهم نواتجها بشكل أفضل.

مثال أكتب الكسور التالية بأبسط صورة.

1. $\frac{6}{8}$
2. $\frac{9}{15}$
3. $\frac{12}{18}$
4. $\frac{30}{35}$
5. $\frac{18}{27}$
6. $\frac{21}{18}$

تدريب أكتب ثلاثة كسور مكافئة للكسر $\frac{3}{4}$

تدريب أكتب الكسور التالية بأبسط صورة.

1. $\frac{2}{4}$	4. $\frac{4}{8}$	7. $\frac{9}{12}$	10. $\frac{12}{36}$
2. $\frac{3}{6}$	5. $\frac{3}{9}$	8. $\frac{6}{15}$	11. $\frac{24}{42}$
3. $\frac{6}{9}$	6. $\frac{4}{12}$	9. $\frac{15}{20}$	12. $\frac{60}{80}$

ثالثاً **جمع وطرح الكسور**

يوجد قاعدتين أساسيتين لجمع وطرح الكسور وتعتمدان على تشابه أو اختلاف المقامات، وكما يلي:

قاعدة 1 لجمع/طرح كسرين لهما نفس المقام نجمع/نطرح البسطين ونضع الناتج بسطاً لنفس المقام.

مثال. جد ناتج ما يلي بأبسط صورة.

1. $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} =$
4. $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} =$
2. $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} =$
5. $\frac{8}{15} - \frac{2}{15} =$
3. $\frac{5}{12} - \frac{1}{12} =$
6. $\frac{5}{18} - \frac{13}{18} =$

تدريب جد ناتج العمليات التالية بأبسط صورة.

1. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$
4. $\frac{3}{8} + \frac{1}{8}$
7. $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$
10. $\frac{1}{12} - \frac{5}{12}$
2. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
5. $\frac{-1}{6} - \frac{1}{6}$
8. $\frac{5}{6} - \frac{7}{6}$
11. $\frac{-4}{15} - \frac{8}{15}$
3. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$
6. $\frac{1}{6} - \frac{5}{6}$
9. $\frac{5}{4} - \frac{3}{4}$
12. $\frac{-2}{3} - \frac{4}{3}$

<u>قاعدة 2</u> لجمع/طرح كسرين مختلفين في المقام نقوم بتوحيد المقامات أولاً ثم نجري العملية حسب القاعدة السابقة، مع ملاحظة أنه يمكن إجراء عملية تبسيط للكسر الناتج حسب بسطه ومقامه.

<u>مثال</u> جد ناتج العمليات التالية بأبسط صورة.

1. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$

2. $\frac{3}{8}-\frac{3}{4}=$

نلاحظ أنه قمنا بتوحيد أحد المقامات فقط عن طريق إيجاد كسر مكافئ له مقامه يساوي مقام الكسر الآخر.

3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\times3}{2\times3}+\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

4. $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=$

نلاحظ أنه قمنا بتوحيد كلا المقامين وذلك لعدم إمكانية الحصول على مقامات موحدة عن طريق إيجاد كسر مكافئ لأحد المقامين.

$$\frac{a}{b}\mp\frac{c}{d}=\frac{a\times d\ \mp c\times b}{b\ \times d}$$

<u>مثال</u> جد ناتج العمليات التالية بأبسط صورة.

1. $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=$

2. $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=$

<u>الجمع والطرح للعدد 1 مع الكسور:</u>

1. $\frac{1}{2}-1=$	2. $\frac{3}{5}-1=$	3. $\frac{7}{5}-1=$
4. $\frac{1}{3}+1=$	5. $\frac{3}{5}+1=$	6. $\frac{-3}{5}+1=$
7. $\frac{-3}{4}+1$	8. $\frac{-2}{3}-1=$	9. $\frac{-2}{3}+1=$

تدريب جد ناتج العمليات التالية بأبسط صورة.

1. $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}$	6. $\frac{5}{6}-1$	11. $\frac{1}{3}-1$
2. $\frac{3}{8}-\frac{5}{8}$	7. $1-\frac{2}{3}$	12. $\frac{1}{2}-1$
3. $\frac{1}{4}+\frac{5}{12}$	8. $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$	13. $\frac{5}{12}-\frac{3}{8}$
4. $\frac{1}{3}-\frac{5}{9}$	9. $\frac{-2}{3}+\frac{5}{4}$	14. $\frac{3}{2}-\frac{3}{5}$
5. $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$	10. $\frac{5}{4}-\frac{5}{6}$	15. $\frac{5}{4}-\frac{6}{5}$

رابعاً ضرب الكسوروقسمتها

قاعدة 1 لضرب كسرين نضرب بسط الكسر الأول ببسط الكسر الثاني ومقام الكسر الأول بمقام الكسر الثاني ونضع النواتج بسطاً ومقاماً للكسر الجديد، مع ملاحظة أنه يمكن إجراء تبسيط للكسور قبل أو بعد الضرب ويفضل قبل الضرب، كما يمكن إجراء التبسيط بين بسط كسر ومقام الكسر الآخر.

مثال جد ناتج العمليات التالية بأبسط صورة.

1. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2\times4}{3\times5} = \frac{8}{15}$	3. $\frac{-3}{5} \times \frac{2}{7} =$
2. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} =$	4. $\frac{18}{15} \times \frac{10}{27} =$

قاعدة 2 لقسمة كسرين نقوم بضرب الكسر الأول بمقلوب الكسر الثاني، وتسمى هذه العملية تحويل القسمة إلى ضرب.

مثال جد ناتج العمليات التالية بأبسط صورة.

1. $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

2. $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} =$

3. $\frac{-3}{5} \div \frac{2}{7} =$

4. $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} =$

5. $2 \div \frac{3}{5} =$

6. $\frac{2}{5} \div \frac{1}{3} =$

7. $\frac{14}{15} \div \frac{8}{25} =$

8. $\frac{9}{16} \div \frac{27}{8} =$

تدريب جد ناتج العمليات التالية بأبسط صورة.

1. $\frac{1}{4} \times \frac{5}{3}$	6. $\frac{14}{15} \div \frac{7}{25}$
2. $\frac{4}{9} \times \frac{5}{4}$	7. $\frac{-12}{25} \times \frac{18}{35}$
3. $5 \times \frac{2}{3}$	8. $-9 \div \frac{6}{5}$
4. $\frac{2}{3} \div \frac{5}{9}$	9. $\frac{2}{3} \div 6$
5. $\frac{5}{6} \div \frac{1}{4}$	10. $\frac{-9}{8} \div \frac{10}{27}$

تدريب جد ناتج العمليات التالية بأبسط صورة.

1. $\frac{1}{2} \times (6 \div 2 + 5) - 3 \times 2$

2. $\frac{1}{3} \times (49 \div 7 - 1) + 2 \times 3 - 5$

الأسس وقوانين الأسس

الأسس هي طريقة رياضية للتعبير عن عمليات الضرب المتكرر.

مثلاً عملية الضرب $2\times2\times2\times2\times2$ تكتب باستخدام الأسس (2^5) ويسمى العدد 2 الأساس وهو العدد الذي تكرر ضربه، ويسمى العدد 5 الأس وهو عدد مرات تكرار الضرب.

قوانين الأسس

تعتبر قوانين الأسس من القوانين ذات الأهمية الكبرى لأي دارس لمادة الرياضيات وذلك لكثرة استخدامها في حل مختلف المسائل الرياضية، وتالياً ملخص لهذه القوانين:

1. الأسس في حالة الضرب تجمع، بشرط تساوي الأساسات.

$$x^n \times x^m = x^{n+m}$$

مثال جد ناتج ما يلي كقوة واحدة

1. $x \times x =$	3. $x^2 \times x^3 =$
2. $x \times x^2 =$	4. $x^4 \times x^3 =$

2. الأسس في حالة القسمة تطرح، بشرط تساوي الأساسات.

$$x^n \div x^m = x^{n-m} \quad or \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

مثال جد ناتج ما يلي كقوة واحدة:

1. $x^3 \div x^2 =$	3. $x^3 \div x^5 =$
2. $x^5 \div x^2 =$	4. $x^4 \div x^4 =$

نلاحظ من العمليات السابقة أن الأسس قد تكون أعداد صحيحة موجبة أو سالبة أو صفر.

3. الأسس في حالة الرفع تضرب.

$$(x^n)^m = x^{n\times m}$$

<u>مثال</u> جد ناتج ما يلي كقوة واحدة:

1. $(x^2)^3 =$

2. $(x^{-2})^3 =$

3. $(x^3)^{-3} =$

4. يمكن توزيع الأسس على الضرب والقسمة.

$$(x \times y)^n = x^n \times y^n \;, \quad (\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n}$$

<u>أمثلة</u> جد ناتج ما يلي:

1. $(x \times y)^2 =$

2. $\left(\frac{x}{y}\right)^3 =$

3. $\left(x^2 \times y^3\right)^2 =$

4. $(3x)^2 =$

5. $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2 =$

<u>ملاحظة</u>: لا يمكن توزيع الأسس على الجمع والطرح أي أن $(x \mp y)^n \neq x^n \mp y^n$ ، وهذا خطأ شائع يجب تجنبه، وسوف نتطرق للعملية $(x \mp y)^n$ خلال دراسة ضرب المقادير الجبرية.

5. عند نقل الأسس من البسط إلى المقام أو العكس فإن إشارتها تتغير.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad , \qquad \frac{1}{x^{-n}} = x^n$$

<u>مثال</u> جد ناتج ما يلي بأسس موجبة:

1. $x^3 \div x^5 =$
2. $x^2 \times x^{-5} =$
3. $x^{-2} \div x^3 =$

<u>نتيجة</u> $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \left(\frac{y}{x}\right)^{-n}$

6. ناتج الرفع للأس صفر هو 1.

$$(x)^0 = 1$$

<u>مثال</u>

$$x^3 \div x^3 =$$

تدريب جد ناتج ما يلي بأسس موجبة.

1. $x^3 \times x^5 =$	9. $(3x)^2 =$
2. $x^{-2} \times x^4 =$	10. $\left(2x^2\right)^3 =$
3. $x^3 \times x^{-5} =$	11. $x^7 \div x^7 =$
4. $x^6 \div x^4 =$	12. $(x^2 \times y^{-3})^2 =$
5. $x^3 \div x^5 =$	13. $\left(\frac{3x^2}{2x^4}\right)^2 =$
6. $\left(x^3\right)^2 =$	14. $\left(\frac{2x^{-2}}{3x}\right)^3 =$
7. $\frac{x^{-2}}{y^{-4}} =$	
8. $\left(x^3\right)^{-2} =$	

الأسس الكسرية

تعتبر الجذور أسساً نسبية وذلك حسب القاعدة التالية وتطبق عليها قوانين الأسس الصحيحة:

$$\sqrt[n]{x^m} = (x)^{\frac{m}{n}}$$

مثال أكتب ما يلي على شكل أسس في البسط.

5. $\frac{1}{\sqrt{x}} =$	1. $\sqrt{x} =$
6. $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} =$	2. $\sqrt[3]{x} =$
7. $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$	3. $\sqrt[3]{x^2} =$
	4. $\sqrt[5]{x^3} =$

مثال جد ناتج ما يلي بأبسط صورة.

1. $x\sqrt{x} =$

2. $\frac{x}{\sqrt{x}} =$

3. $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} =$

4. $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} =$

تدريب جد ناتج ما يلي بأبسط صورة.

5. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$	1. $x^2\sqrt{x} =$
6. $\frac{x}{\sqrt[5]{x^2}} =$	2. $x\sqrt{x^3} =$
7. $\frac{\sqrt{x^3}}{x^2}$	3. $x\sqrt[3]{x} =$
	4. $\frac{x^2}{\sqrt{x}} =$

مربعات ومكعبات الأعداد وجذورها

أولاً مربعات الأعداد وجذورها التربيعية

يجب على الطالب حفظ مربعات الأعداد الصحيحة من 1 إلى 15 وذلك لما لها من أهمية أثناء التعامل مع مختلف المسائل الرياضية وهي موضحة في الجدول التالي:

العدد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
المربع	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

ملاحظات:

1. الجذر التربيعي هو عملية عكسية للتربيع، مثلاً $\sqrt{9}$ هو عملية إيجاد العدد الذي مربعه 9.
2. مربع العدد السالب دائما عدد موجب، مثل $(-5)^2 = 25$
3. لا يمكن حساب الجذر التربيعي لعدد سالب في مجموعة الأعداد الحقيقية.
4. لحساب الجذر التربيعي لعدد عشري نحسب جذره كعدد صحيح ونضع له منزلة عشرية مقابل كل منزلتين عشريتين داخل الجذر، مثلا $\sqrt{0.0025} = 0.05$.
5. يجب على الطالب حفظ أسس العدد 2 كما يلي:

$$2^1 = 2 \quad , \quad 2^2 = 4 \quad , \quad 2^3 = 8 \quad , \quad 2^4 = 16 \quad , \quad 2^5 = 32$$

$$2^6 = 64 \ , \quad 2^7 = 128 \ , \quad 2^8 = 256 \ , \quad 2^9 = 512 \ , \quad 2^{10} = 1024$$

مثال : جد ناتج ما يلي:

1. $2^{-4} =$	6. $(1.5)^2 =$
2. $3^{-2} =$	7. $\sqrt{0.04} =$
3. $(0.3)^2 =$	8. $\sqrt{0.25} =$
4. $(0.7)^2 =$	9. $\sqrt{1.21} =$
5. $(1.2)^2 =$	10. $\sqrt{1.96} =$

ثانياً مكعبات الأعداد وجذورها التكعيبية

يجب على الطالب حفظ مكعبات الأعداد الصحيحة من 1 إلى 10 وذلك لما لها من أهمية أثناء التعامل مع مختلف المسائل الرياضية وهي موضحة في الجدول التالي:

العدد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
المكعب	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

ملاحظات:

1. الجذر التكعيبي هو عملية عكسية للتكعيب، مثلاً $\sqrt[3]{27}$ هو عملية إيجاد العدد الذي مكعبه 27.
2. مكعب العدد السالب دائما عدد سالب، مثل $(-4)^3 = -64$
3. الجذر التكعيبي لعدد سالب هو عدد سالب، مثلا $\sqrt[3]{-125} = -5$.
4. لحساب الجذر التكعيبي لعدد عشري نحسب جذره كعدد صحيح ونضع له منزلة عشرية مقابل كل ثلاثة منازل عشرية داخل الجذر، مثلاً $\sqrt[3]{0.000343} = 0.07$.
5. يجب على الطالب حفظ بعض أسس العدد 3 كما يلي:

$$3^1 = 3 \quad , \quad 3^2 = 9 \quad , \quad 3^3 = 27 \quad , \quad 3^4 = 81 \quad , \quad 3^5 = 243$$

مثال : جد ناتج ما يلي:

1. $4^{-3} =$
2. $3^{-4} =$
3. $(0.3)^3 =$
4. $(0.4)^3 =$
5. $(0.5)^3 =$
6. $\sqrt{-343} =$
7. $\sqrt{0.008} =$
8. $\sqrt{-0.216} =$

الحدود والمقادير الجبرية والعمليات عليها

تعتبر الحدود والمقادير الجبرية من المواضيع ذات الأهمية البالغة في الرياضيات وذلك لكثرة استخدامها في المراحل العليا، وبداية يجب فهم مكوناتها من خلال معرفة المصطلحات التالية:

1. الثابت: هو كمية معلومة لها مقدار معين ونعبر عن ذلك المقدار باستخدام الأعداد.
2. المتغير: هو كمية مجهولة أو متغيرة من وقت لآخر ونعبر عنها باستخدام الرموز مثل x , y.
3. الحد الجبري: هو حاصل ضرب ثابت بمتغير واحد أو أكثر وقد يتكون من ثابت فقط، ومن الأمثلة على ذلك الحدود $5 , -7 , x , 2x , -4x , 9x^2 , 6xy^2$.
4. المقدار الجبري: هو مجموعة من الحدود الجبرية تفصل بينها عمليات جمع وطرح وقد يتكون من حد واحد أو من ثابت فقط، ومن الأمثلة على المقادير الجبرية $3x^2 - 5x$, $6x^2$, 3.

ملاحظة: يسمى الثابت في الحد الجبري معاملاً، ويجب تحديد المعامل باستخدام كميته وإشارته، مثلا معامل x في الحد $(5x)$ هو 5 ، ومعامل x في الحد $(-7x)$ هو -7

أولاً جمع الحدود والمقادير الجبرية وطرحها

قبل البدء بعمليات الجمع والطرح للحدود والمقادير الجبرية يجب فهم معنى تشابه الحدود الجبرية وذلك لما له من أهمية كبيرة في هذه العمليات.

تعريف : يتشابه حدان جبريان أو أكثر إذا تحقق ما يلي:

1. أن يكون للحدود نفس المتغيرات
2. أن يكون للمتغيرات المتناظرة نفس الأسس.

أمثلة:

1. الحدود $3x , -5x , \sqrt{2}x$ متشابهة.
2. الحدود $3x , 3x^2$ غير متشابهة لاختلاف الأسس للمتغير x.

قاعدة 1 لجمع/طرح حدين جبريين متشابهين أو أكثر نقوم بجمع/طرح معاملات الحدود ونضع الناتج معاملاً لنفس المتغير/المتغيرات، والحدود غير المتشابهة تبقى كما هي.

ملاحظة: تسمى هذه العملية أيضاً (تجميع الحدود المتشابهة)، وغالباً يتم إجراءها بعد عمليات ضرب المقادير الجبرية والتي سيتم شرحها لاحقاً.

مثال: جد ناتج ما يلي:

1. $3x + 5x + 4x = (3 + 5 + 4)x = 12x$
2. $4x - 9x + 6 =$
3. $2x^2 - 5x + 6x^2 + 4x =$

قاعدة 2 لجمع مقدارين جبريين نقوم بتجميع الحدود المتشابهة كما في القاعدة رقم 1 مع ملاحظة أن عملية الجمع لا تؤثر على إشارات المقدار الثاني.

مثال: جد ناتج ما يلي:

1. $(3x^2 + 5x) + (2x^2 - 7x) = 3x^2 + 5x + 2x^2 - 7x$

$$= 5x^2 - 2x$$

2. $(7x^2 - 4x) + (-x^2 - 2x) =$

قاعدة 3 لطرح مقدارين جبريين نقوم بتجميع الحدود المتشابهة كما في القاعدة رقم 1 مع ملاحظة أن عملية الطرح تُغيّر جميع إشارات المقدار الثاني:

أمثلة: جد ناتج ما يلي:

1. $(6x^2 - 5x) - (2x^2 - 7x) = 6x^2 - 5x - 2x^2 + 7x$

$$= 4x^2 + 2x$$

2. $(7x^2 - 4x) - (-x^2 - 2x) =$

<u>تدريب</u> جد ناتج ما يلي:

1. $(2x+5)+(3x+7)=$	5. $(2x+5)-(3x+7)=$
2. $(2x^2+5x)+(3x^2+7x)=$	6. $(2x^2+5x)-(3x^2+7x)=$
3. $(4x^2-5)+(3x^2-7)=$	7. $(4x^2-5)-(8x^2-6)=$
4. $(3x^2-2x)+(5x^2-6x)=$	8. $(3x^2-2x)-(5x^2-6x)=$

ثانياً ضرب الحدود والمقادير الجبرية

لتسهيل دراسة عملية ضرب الحدود والمقادير الجبرية سوف يتم التدرج في شرح عمليات الضرب مع توضيح كل مستوى من هذه العمليات.

قاعدة 1 (ضرب حد جبري بثابت): لضرب حد جبري بثابت نقوم بضرب الثابت بمعامل الحد ويبقى المتغير كما هو، مع مراعاة قواعد الإشارات في الضرب.

أمثلة:

$$5 \times 3x = 15x \qquad , \qquad -3 \times 2x^2 = -6x^2$$

قاعدة 2 (ضرب حد جبري بحد جبري آخر): لضرب حدين جبريين نقوم بضرب المعاملات حسب قواعد ضرب الأعداد، ونقوم بضرب المتغيرات حسب قوانين الأسس.

مثال: جد ناتج ما يلي:

3. $4x^2 \times (-3x) =$	1. $5x \times 3x = 15x^2$
4. $-3x^6 \times (-2x^{-2}) =$	2. $-3x \times 2x^2 =$

قاعدة 3 (ضرب حد جبري بمقدار جبري): لضرب حد جبري بمقدار جبري نقوم بضرب الحد بجميع حدود المقدار حسب خاصية توزيع الضرب على الجمع والطرح إضافة إلى القواعد السابقة.

مثال: جد ناتج ما يلي:

1. $2 \times (3x - 5) =$

2. $-4 \times (2x + 3) =$

3. $\frac{1}{3} \times (9x + 12) =$

4. $2x \times (3x + 2) =$

5. $3x \times (2x^2 - 3x + 4) =$

تدريب جد ناتج العمليات التالية.

1. $3 \times (2x+3) =$	7. $\frac{2}{3} \times (6x+9) =$
2. $3 \times (2x+3) =$	8. $4x \times (3x^2-7) =$
3. $4 \times (3x-2) =$	9. $2x^2 \times (4x^2-3x) =$
4. $-2 \times (4x+1) =$	10. $-3x \times (5x^2+6) =$
5. $-3 \times (5-3x) =$	11. $-2x^2 \times (5x^3-6x^2) =$
6. $\frac{1}{2} \times (6x-8) =$	12. $\frac{5}{6} \times (4x-8) =$

قاعدة 4 (ضرب مقدار جبري بمقدار جبري آخر): لضرب مقدار جبري بمقدار جبري آخر نقوم بضرب جميع حدود المقدار الأول بجميع حدود المقدار الثاني مع مراعاة القواعد السابقة، ثم نقوم بتجميع الحدود المتشابهة عند اللزوم.

مثال: جد ناتج ما يلي بأبسط صورة:

1. $(x+3) \times (x+4) =$

2. $(2x+3) \times (3x+2) =$

3. $(3x^2-2x) \times (2x^2-x) =$

4. $(x+2)^2 =$

5. $(x-3)^2 =$

<u>نتيجة</u>:

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \quad , \quad (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

<u>مثال</u>: جد ناتج ما يلي بأبسط صورة:

1. $(x+4)\times(x+2) =$

2. $(x-4)\times(x-2) =$

3. $(x+4)\times(x-2) =$

4. $(x-4)\times(x+2) =$

<u>تدريب</u> جد ناتج العمليات التالية بأبسط صورة.

1. $(x+3)(x+2)$	9. $(x+2)^2$
2. $(x-2)(x-5)$	10. $(x+6)^2$
3. $(x+3)(x-6)$	11. $(x-3)^2$
4. $(x-2)(x+7)$	12. $(x-5)^2$
5. $(x-3)(x-2)$	13. $(3x-2)\times(4x+1)$
6. $(x-5)(x-5)$	14. $(x^2-2x)\times(x^2+3x)$
7. $(x+4)(x-4)$	15. $(2x^2-3x)\times(x^2-2x)$
8. $(x-6)(x+6)$	16. $(x^3+2x)\times(x^2-2)$

تحليل المقادير الجبرية

تعتبر عمليات تحليل المقادير الجبرية أيضاً من العمليات ذات الأهمية البالغة في الرياضيات، وذلك بسبب الحاجة لاستخدامها في حل الكثير من المسائل، ويمكن تعريف عملية تحليل المقادير الجبرية بأنها عملية عكسية لعملية الضرب، وسيتم تالياً عرض طرق التحليل المختلفة.

أولاً <u>التحليل بإخراج عامل مشترك:</u> ويتم خلال هذه العملية إخراج العامل المشترك بين حدين أو أكثر على صورة حد جبري مكون من ثابت أو ثابت مضروباً بمتغير حسب المسألة، وتعتبر هذه العملية بمثابة قسمة حدود المقدار على العامل المشترك وكتابته على صورة حد مضروباً بما تبقى من المقدار، والأمثلة التالية توضح ذلك.

<u>مثال</u> حل المقادير التالية بإخراج العامل المشترك بينها.

1. $2x + 4 =$
2. $3x - 9 =$
3. $4x^2 + 6 =$
4. $2x^2 + 6x =$
5. $4x^3 - 10x^2 =$

<u>تدريب</u> حل المقادير التالية بإخراج العامل المشترك بينها.

7. $15x^3 - 6x^2 =$	1. $2x - 6 =$
8. $12x^2 - 15x^3 =$	2. $12 - 3x =$
9. $2x^3 - 54 =$	3. $10x - 15 =$
10. $3x^2 - 48x =$	4. $3x^2 - 9 =$
11. $2x^3 - 6x^2 + 8x =$	5. $4x^2 - 12x =$
12. $5x^4 - 15x^3 + 20x^2 =$	6. $8x^2 + 2x =$

ثانياً **تحليل الفرق بين مربعين:**

يسمى المقدار الجبري الذي صورته $(x^2 - a^2)$ فرقاً بين مربعين

ويحلل كما يلي : $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

مثال توضيحي المقدار $(x^2 - 9)$ يعتبر فرق بين مربعين لأن:

$$(x^2 - 9) = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$$

مثال حلل المقادير التالية إلى فرق بين مربعين.

1. $x^2 - 1 =$

2. $x^2 - 4 =$

3. $25 - x^2 =$

4. $4x^2 - 81 =$

ويمكن استخدام إخراج العامل المشترك قبل التحليل إلى فرق بين مربعين كما هو موضح تالياً :

1. $2x^2 - 18 =$

2. $3x^3 - 48x =$

ملاحظة هامة مجموع مربعين لا يحلل إلى أقواس أي أن العبارة التي صورتها $(x^2 + a^2)$ لا تحلل.

مثال العبارات التالية لا تحلل .

$$(x^2 + 1) \ , \ (x^2 + 4) \ , \ (x^2 + 9) \ , \ (x^2 + 16) \ , \ (x^2 + 25) \ , \ (x^2 + 36)$$

تدريب حل المقادير التالية إلى فرق بين مربعين.

1. $x^2 - 36 =$	6. $x^3 - x =$
2. $9 - x^2 =$	7. $2x^3 - 50x =$
3. $x^2 - 64 =$	8. $144 - x^2 =$
4. $9x^2 - 100 =$	9. $x^3 - 169x =$
5. $5x^2 - 20 =$	10. $x^4 - 16x^2 =$

ثالثاً **تحليل مجموع مكعبين والفرق بين مكعبين:**

يسمى المقدار الجبري الذي صورته $(x^3 + a^3)$ مجموع مكعبين.

يسمى المقدار الجبري الذي صورته $(x^3 - a^3)$ فرقاً بين مكعبين.

وتحلل هذه المقادير كما يلي :

1. $(x^3 + a^3) = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$
2. $(x^3 - a^3) = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

مثال توضيحي

المقدار $(x^3 + 8)$ يعتبر مجموع مكعبين لأن: $(x^3 + 8) = x^3 + 2^3$ ويحلل كما يلي: $(x^3 + 8) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$	المقدار $(x^3 - 27)$ يعتبر فرق بين مكعبين لأن: $(x^3 - 27) = x^3 - 3^3$ ويحلل كما يلي: $(x^3 - 27) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

مثال حلل المقادير التالية إلى فرق / مجموع مكعبين.

1. $x^3 - 1 =$
2. $x^3 - 8 =$
3. $x^3 + 27 =$
4. $x^3 + 343$

تدريب حلل المقادير التالية.

4. $2x^3 + 2 =$	1. $x^3 - 64 =$
5. $2x^3 + 54 =$	2. $x^3 - 125 =$
6. $x^3 + 512 =$	3. $8x^3 - 343 =$

رابعاً **تحليل العبارة التربيعية ثلاثية الحدود:**

يتم خلال هذه العملية تحليل العبارة التي صورتها العامة (ax^2+bx+c) ، ويقصد بعملية التحليل هذه تحويل العبارة إلى قوسين مضروبين ببعضهما على الصورة $(x+n)(x+m)$ ، وهنا سنقوم بتحليل هذه العبارة عندما تكون $a=1$ ، وقبل ذلك سندرس العمليات التالية ولنلاحظ نظام الإشارات لهذه العمليات الأمر الذي سيفيدنا في عملية التحليل:

1. $(x+4)(x+2) = x^2+6x+8$
2. $(x-4)(x-2) = x^2-6x+8$

نلاحظ في المثالين 1 ، 2 أن إشارة الحد الأخير موجبة وأن العددين في الأقواس لهما نفس الإشارة.

3. $(x+4)(x-2) = x^2+2x-8$
4. $(x-4)(x+2) = x^2-2x-8$

نلاحظ في المثالين 3 ، 4 أن إشارة الحد الأخير سالبة وأن إشارة العددين في الأقواس مختلفة.

نتيجة نلاحظ أنه لتحليل العبارة (x^2+bx+c) إلى القوسين $(x\mp n)(x\mp m)$ فإنه يلزمنا إيجاد عددين حاصل ضربهما (c) وناتج جمعهما (b) مع مراعاة الإشارات الموجبة والسالبة، ومن خلال الأمثلة السابقة يمكن تلخيص طريقة التحليل حسب الجدول التالي:

العددين المطلوبين	إشارة الحد الأوسط b	إشارة الحد الأخير c	العبارة
موجبين	+	+	x^2+bx+c
سالبين	−	+	x^2-bx+c
مختلفين الأكبر موجب	+	−	x^2+bx-c
مختلفين الأكبر سالب	−	−	x^2+bx+c

مثال حل العبارات التربيعية التالية:

1. $x^2+4x+3=$	3. $x^2-2x-3=$
2. $x^2-4x+3=$	4. $x^2-2x-3=$

مثال حلل العبارات التربيعية التالية:

1. $x^2 + 8x + 15 =$	4. $x^2 + 2x - 15 =$
2. $x^2 - 9x + 18 =$	5. $x^2 - 3x - 18 =$
3. $x^2 - 5x + 6 =$	6. $x^2 - x - 12 =$

تدريب حلل العبارات التربيعية التالية:

1. $x^2 + 7x + 10 =$	11. $x^2 + 3x - 10 =$
2. $x^2 + 2x + 1 =$	12. $x^2 + 3x - 18 =$
3. $x^2 + 7x + 12 =$	13. $x^2 + 3x - 4 =$
4. $x^2 + 4x + 4 =$	14. $x^2 - 2x - 15 =$
5. $x^2 - 8x + 15 =$	15. $x^2 - 4x - 12 =$
6. $x^2 - 6x + 9 =$	16. $x^2 - 4x - 5 =$
7. $x^2 - 8x + 16 =$	17. $x^2 + x + 6 =$
8. $x^2 + 5x + 6 =$	18. $x^2 + x - 12 =$
9. $x^2 - 9x + 20 =$	19. $x^3 - 2x^2 - 8x =$
10. $x^2 - 10x + 21 =$	20. $2x^3 + 2x^2 - 12x =$

<u>تحليل العبارة التربيعية ثلاثية الحدود عندما $(a \neq 1)$</u>

الصورة العامة $ax^2 + bx + c$

نلاحظ في هذه العبارة أن معامل (x^2) ليس العدد (1)، وسندرس طريقة مبسطة لتحليلها:

<u>مثال</u> حلل العبارات التربيعية التالية:

1. $2x^2 + 5x - 3 =$

2. $2x^2 - x - 3 =$

3. $3x^2 + 7x + 4 =$

<u>تدريب</u> حلل العبارات التربيعية التالية:

3. $3x^2 + 7x - 6 =$	1. $2x^2 + x - 6 =$
4. $3x^2 + 5x + 2 =$	2. $3x^2 + 5x - 2 =$

حل المعادلة الخطية بمتغير واحد

قد نلجأ في الكثير من مسائل الرياضيات إلى حل معادلة خطية بمتغير واحد لإيجاد قيمة ثابت مجهول، ويعتمد حل المعادلة الخطية بمتغير واحد على المبادئ التالية:

1. تجميع المتغيرات في أحد طرفي المعادلة والثوابت في الطرف الآخر.
2. عند إجراء عملية حسابية على أحد أطراف المعادلة يجب إجراء نفس العملية على الطرف الآخر.
3. يمكن إضافة أو طرح عدد لطرفي المعادلة أو ضربها وقسمتها بأي عدد .

حل المعادلة هو عملية إيجاد قيمة المتغير المجهول التي تحقق المعادلة (تجعلها صحيحة).

مثال جد مجموعة حل المعادلات التالية:

1. $3x + 2 = 8$ (بطرح 2 من الطرفين) $3x = 6$ (بالقسمة على 3) $x = 2$	3. $2x - 5 = 7x + 15$
2. $5x + 5 = 2x + 14$ (طرح $2x$) $3x + 5 = 14$ (طرح 5) $3x = 9$ (بالقسمة على 3) $x = 3$	4. $5 - 2x = 9 - 4x$

تدريب جد مجموعة حل المعادلات التالية.

1. $3x + 7 = 13$	7. $2x + 9 = 5x$
2. $2x - 8 = -12$	8. $7x - 2 = 3x - 10$
3. $4x + 15 = 3$	9. $6 - 2x = 3x + 1$
4. $6 - 2x = 10$	10. $5x - 2 = 7x - 13$
5. $5(x + 1) = 15$	11. $3 - 2x = 7x - 13$
6. $3x + 4 = x$	12. $3(2 - x) = 2x - 1$

حل المعادلة التربيعية

كما أسلفنا بأننا قد نلجأ في الكثير من مسائل الرياضيات إلى حل معادلة خطية، كذلك الأمر بالنسبة للمعادلة التربيعية، فحل المعادلة التربيعية يعتمد أساساً على تحليل العبارات التربيعية واستخدام الخاصية الصفرية والتي سيتم توضيحها لاحقاً، ولا بد من معرفة أن المعادلة التربيعية قد يكون لها حلان حقيقيان أو حل واحد أو ليس لها حلول حقيقية.

الخاصية الصفرية إذا كان $a \times b = 0$ فإنه:

إما أن تكون $a = 0$ أو أن تكون $b = 0$

مثال جد مجموعة حل المعادلات التالية:

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$ التحليل إلى أقواس

$(x-3)(x-2) = 0$ استخدام الخاصية الصفرية

$x - 3 = 0$ or $x - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 3$ and $x = 2$

2. $x^2 - 2x - 15 = 0$ التحليل إلى أقواس

$(x-5)(x+3) = 0$ استخدام الخاصية الصفرية

$x - 5 = 0$ or $x + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 5$ and $x = -3$

3. $x^2 + 3x - 10 = 0$

$(x+5)(x-2) = 0$

4. $x^2 + 6x + 8 = 0$

تدريب جد مجموعة حل المعادلات التالية.

6. $x^2 - x - 6 = 0$	1. $x^2 - 7x + 10 = 0$
7. $x^2 + x - 6 = 0$	2. $x^2 + 2x - 8 = 0$
8. $x^2 + x - 12 = 0$	3. $x^2 - 3x - 18 = 0$
9. $x^2 = 4x - 4$	4. $x^2 - 7x + 18 = 0$
10. $x^2 = 6x - 9$	5. $x^2 - 6x + 9 = 0$

حل المتباينة الخطية بمتغير واحد

قد نلجأ في الكثير من مسائل الرياضيات إلى حل متباينة خطية بمتغير واحد لإيجاد مجموعة الحل لها، ويتم حل المتباينة الخطية بمتغير واحد كما في حل المعادلة الخطية، والاختلاف يكون بالناتج حيث أن حل المتباينة يكون فترة عددية.

مثال جد مجموعة حل المتباينات التالية:

3. $6 - 2x > 0$	1. $2x - 4 > 0$ (جمع 4 للطرفين) $2x > 4$ (بالقسمة على 2) $x > 2$
4. $5 - 2x > 0$	2. $5x + 10 > 0$

تدريب جد مجموعة حل المتباينات التالية.

3. $9 - 3x > 0$	1. $3x - 6 > 0$
4. $7 - 3x > 0$	2. $4x + 8 > 0$

الإقتـــرانـــات

1. <u>الإقتران</u> هو علاقة بين عناصر مجموعتين تسمى الأولى المجال والثانية المدى بحيث يكون لكل عنصر من عناصر المجال صورة واحدة في المدى، ويرمز له بالرمز $f(x)$ or $g(x)$ أو بأي حرف مناسب.

2. يكتب الإقتران على شكل مقدار جبري مكوّن من حد واحد أو أكثر مثل $(f(x) = 2x^2 - 2x)$ ويسمى إقتران بدلالة المتغير (x)، كما يسمى المقدار الجبري (قاعدة الإقتران).

3. يمكن حساب القيمة العددية للمقدار الجبري في الإقتران عن طريق تعويض قيمة المتغير (x)، في الإقتران وإجراء العمليات الحسابية المطلوبة، والقيمة الناتجة عن ذلك تسمى صورة العدد (x)، أو تسمى قيمة (y)، ويمكن كتابتها على شكل زوج مرتب (x , y)، ومن ثم تمثيلها على شكل نقطة في المستوى البياني.

4. يمكن تسمية كل نوع من الإقترانات باسم خاص حسب درجته (قوى x).

<u>أنواع الإقترانات</u>

1. الإقتران الثابت ويكتب على الصورة $(f(x) = c)$ ، حيث $c \in \mathbb{R}$ ، ومن ميزات هذا الإقتران أن ناتج التعويض فيه دائماً هو (c) مهما اختلفت قيمة المتغير (x) لأنه أصلاً لا يحتوي على متغير.

2. الإقتران الخطي (إقتران الدرجة الأولى) ويكتب على الصورة $(f(x) = ax + b)$، حيث $a, b \in \mathbb{R}$ ، ويسمى خطياً لأن تمثيله في المستوى البياني هو خط مستقيم، ويسمى إقتران الدرجة الأولى لأن أعلى أس للمتغير (x) هو الأس 1.

3. الإقتران التربيعي (الدرجة الثانية) وصورته $(f(x) = ax^2 + bx + c)$، حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$، ويسمى تربيعياً أو إقتران الدرجة الثانية لأن أعلى أس للمتغير(x) هو الأس 2.

4. الإقتران المتشعب وهو إقتران مكوّن من أكثر من قاعدة من نوع واحد أو أنواع مختلفة، وتكون كل قاعدة معرّفة على فترة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، ويكتب أمام كل قاعدة الفترة المعرّفة عليها.

5. عندما نقوم بتحليل المعادلة المرافقة للاقتران فإن قيم (x) الناتجة تسمى جذور أو أصفار الاقتران.

مثال جد ناتج التعويض في الإقترانات التالية عند قيم (x) المبينة بجانب كل منها:

1. $f(x) = 3 \quad , \quad x = 1 \quad , x = 2 , \quad x = -3$

2. $f(x) = 5x - 2 \quad , \quad x = 1 \quad , x = 2 , \quad x = -3$

3. $f(x) = x^2 + 4x - 5 \quad , \quad x = 1 \quad , x = -2 , \quad x = 3$

4. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 6 \quad , \quad x = 1 \quad , x = -1 , \quad x = 2$

5. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 8 \quad , \quad x = 1 \quad , x = -1 , \quad x = -2$

6. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 \quad , \quad x = 1 \quad , x = -1 , \quad x = -2$

خصائص الاقترانات وتمثيلها البياني

أولاً: الإقتران الثابت

1. الصورة العامة : $f(x) = c$

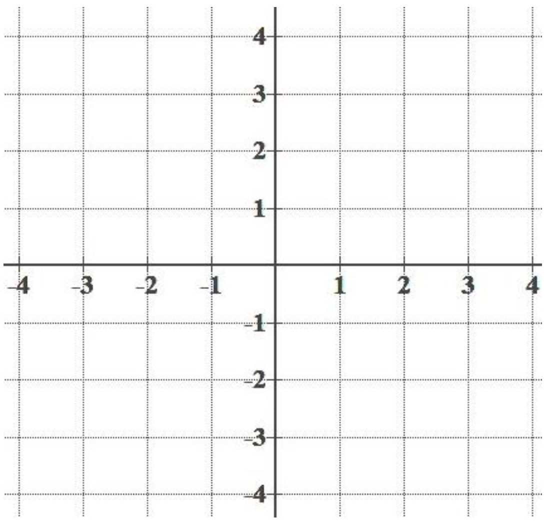
2. المجال : $\mathbb{R}$

3. المدى : $\{c\}$

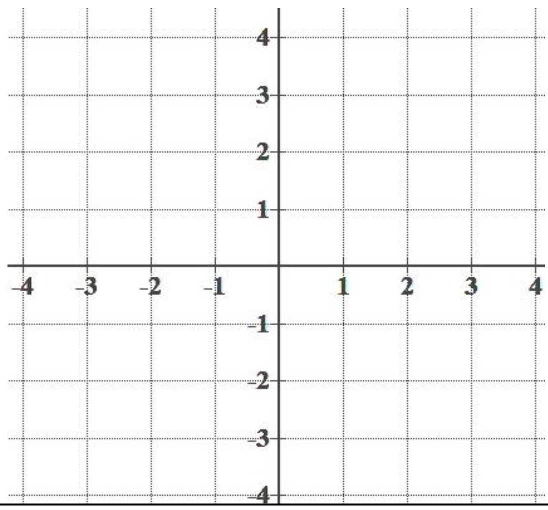
4. التمثيل البياني: خط مستقيم يوازي محور (x) ويبعد عنه (c) وحدة لأعلى أو أسفل حسب إشارة (c).

مثال: مثل الإقترانات التالية بيانياً.

1. $f(x) = 3$



2. $f(x) = -2$



ثانياً: الإقتران الخطي

الصورة العامة : $f(x) = ax + b$ **، حيث** $a, b \in \mathbb{R}$

المجال : $\mathbb{R}$

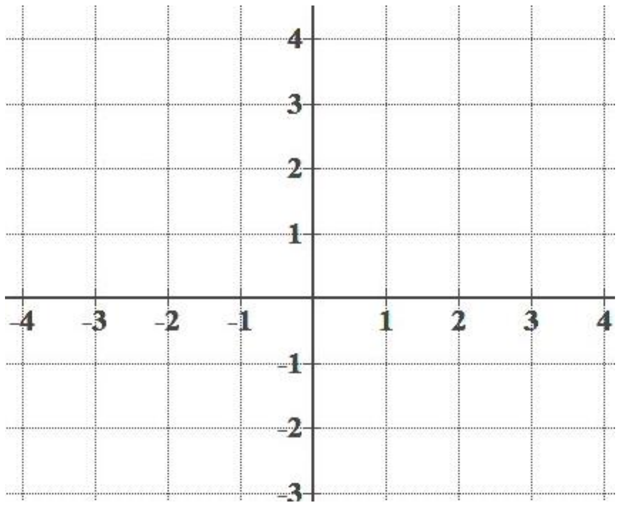
المدى : $\mathbb{R}$

التزايد والتناقص : إذا كانت $(a > 0)$ **يكون الاقتران متزايداً، وإذا كانت** $(a < 0)$ **يكون الاقتران متناقصاً.**

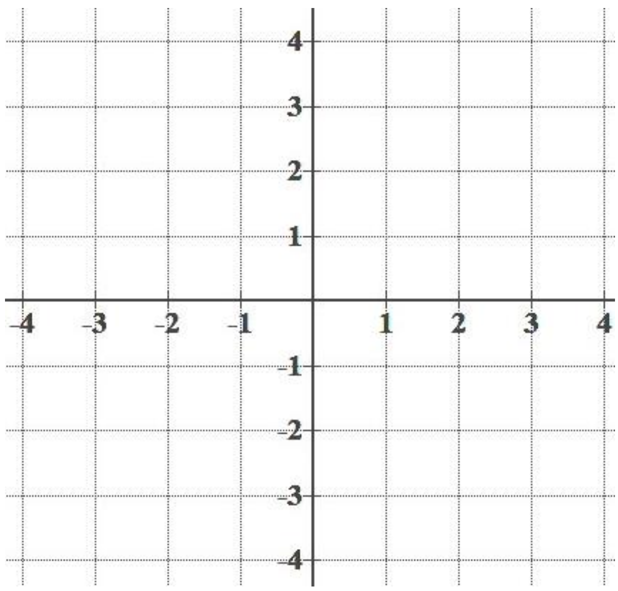
التمثيل البياني : خط مستقيم يتم رسمه من خلال تكوين جدول لقيم x, y **وتمثيل الأزواج المرتبة الناتجة بيانياً والتوصيل بينها بخط مستقيم.**

مثال: مثل الإقترانات التالية بيانياً.

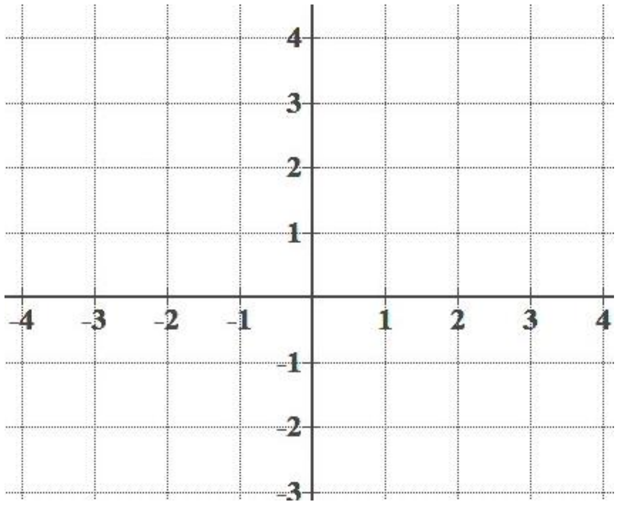
1. $f(x) = x + 1$



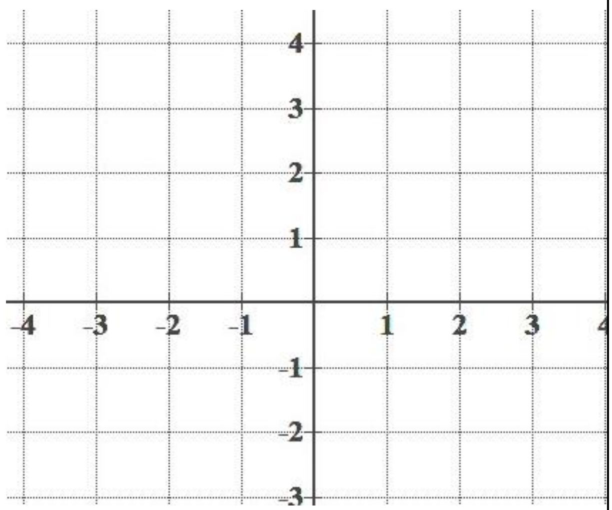
2. $f(x) = 3 - x$



3. $f(x) = 2x - 2$



4. $f(x) = 2 - 2x$



<u>ملاحظات</u>

1. **المقطع السيني للاقتران هو نقطة تقاطعه مع محور (x) ويتم ايجاده من خلال تعويض $(y = 0)$ وحل المعادلة الناتجة.**

2. **المقطع الصادي للاقتران هو نقطة تقاطعه مع محور (y) ويتم ايجاده من خلال تعويض $(x = 0)$ وحل المعادلة الناتجة.**

3. **يمكن استخدام المقطع السيني والصادي لتمثيل الاقتران الخطي بيانياً.**